
3. Espaces de Hilbert et espaces L^2

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Si $x, y \in E$, démontrer les relations suivantes :

- (i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$;
- (ii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$;
- (iii) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\Re(\langle x, y \rangle)$;
- (iv) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des polynômes complexes de degré plus petit ou égal à 2.

- (i) Si $P, Q \in E$, on définit

$$\langle P, Q \rangle := P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(i)\overline{Q(i)}.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- (ii) Fixons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Si $P, Q \in E$, on définit maintenant

$$\langle\langle P, Q \rangle\rangle := P(\alpha)\overline{Q(\alpha)} + P(\beta)\overline{Q(\beta)} + P(\gamma)\overline{Q(\gamma)}.$$

Sous quelle(s) condition(s) sur α, β et γ l'application $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 3. On définit les fonctions f et g sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(2\pi x).$$

- (i) Ces fonctions appartiennent-elles à $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$? Et à $L^1([0, 1])$ et $L^2([0, 1])$?
- (ii) Calculer $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ et $\|g\|_{L^2([0, 1])}$.
- (iii) Calculer si possible le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions ifg et if .

Exercice 4. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{ix}}{x^2 + 4}.$$

Ces fonctions sont-elles dans $L^2(\mathbb{R})$? Si oui, calculer le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ de f et g .

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soient f et g les fonctions d'une variable réelle définies par

$$f(x) = ax + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = bx + 4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (i) Les fonctions f et g appartiennent-elles à $L^2([0, 1])$ et $L^2([-1, 1])$? Si oui, calculer leurs normes respectives dans ces espaces.
- (ii) Sous quelles conditions sur a et b les fonctions f et g sont-elles orthogonales dans $L^2([0, 1])$?
- (iii) Même question, mais dans $L^2([-1, 1])$.
- (iv) Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que les fonctions f et g sont orthogonales dans $L^2([0, 1])$, en est-il de même dans $L^2([-1, 1])$? Si oui, démontrer-le. Sinon, donner un contre-exemple et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de a et b les fonctions f et g sont simultanément orthogonales dans $L^2([0, 1])$ et $L^2([-1, 1])$.